BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2014*

УДК 517.946

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ НАГРЕВА СТЕРЖНЯ С ПОМОЩЬЮ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ

К.К.ГАСАНОВ, Л.К.ГАСАНОВА
Бакинский Государственный Университет
gileyla@mail.ru

В работе рассматривается задача оптимального управления процессом нагрева стержня с помощью граничного управления. Доказана теорема существования и единственности оптимального управления. Получены необходимые и достаточные условия для оптимального управления.

Ключевые слова: управление, функционал, сопряженная система, метод Фурье, обобщенное решение.

1. В приложениях возникает большое количество задач оптимального управления процессами, описываемыми параболическими управлениями [1,2,3,5]. Одну из таких задач в теплофизических терминах можно сформулировать следующим образом. Имеется однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью, левый конец которого теплоизолирован, на правом конце происходит теплообмен с внешней средой, температура которого в момент t равна $u(t)$.

Требуется, управляя температурой внешней среды, к заданному моменту времени T распределение температуры в стержне сделать как можно ближе к заданному распределению $y_0(x)$ и внешнюю температуру к заданной температуре $u_0(t)$.

Математическая формулировка этой задачи: требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \int_0^l [y(x,T) - y_0(x)]^2 dx + \beta \int_0^T [u(t) - u_0(t)]^2 dt \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи

$$y_t = a^2 y_{xx},\ (x,t) \in D(0 < x < l,\ 0 < t < T), \tag{2}$$

$$y(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l, \tag{3}$$

$$y_x(0,t)=0, y_x(l,t)=\alpha[u(t)-y(l,t)],\ 0\le t\le T, \tag{4}$$
где $a>0,\ \beta>0,\ y_0(x),\ \varphi(x),\ u_0(t)$ - заданные функции, $\alpha>0$ - коэффициент теплообмена.

Предполагается, что допустимое управление $u(t)$ принадлежит $L_2(0,T)$.

2. Так как управление $u(t)$ из $L_2(0,T)$, то решение краевой задачи будем понимать в обобщенном смысле [4].

Обобщенным решением краевой задачи (2)-(4), соответствующим управлению $u(t)$, называется функция $y(x,t)\in W_2^{1,0}(D)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_0^l [y(x,t)\eta(x,t)-\varphi(x)\eta(x,0)]dx-\alpha a^2\int_0^t [u(\tau)-y(l,\tau)]\eta(l,\tau)d\tau-$$
$$-\int_0^t\int_0^l [y(x,\tau)\eta_t(x,\tau)-a^2 y_x(x,\tau)\eta_x(x,\tau)]dxd\tau=0, \tag{5}$$

при $t\in[0,T]$ и для всех $\eta(x,t)\in W_2^1(D)$.

Теорема 1. Пусть $\varphi(x)\in L_2(0,l)$, $u(t)\in L_2(0,T)$. Тогда краевая задача (2)-(4) имеет единственное обобщенное решение.

Доказательство. Решение краевой задачи (2)-(4) будем искать в виде суммы
$$y(x,t)=z(x,t)+W(x,t), \tag{6}$$
где $z(x,t)$ и $W(x,t)$ есть решения следующих задач:
$$\begin{aligned} &z_t=a^2 z_{xx},\ (x,t)\in D,\\ &z(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le l,\\ &z_x(0,t)=0, z_x(l,t)+\alpha z(l,t)=0,\ 0\le t\le T, \end{aligned} \tag{7}$$
и
$$\begin{aligned} &W_t=a^2W_{xx},\ (x,t)\in D,\\ &W(x,0)=0,\ 0\le x\le l,\\ &W_x(0,t)=0, W_x(l,t)=\alpha[u(t)-W(l,t)],\ 0\le t\le T. \end{aligned} \tag{8}$$

Применяя метод Фурье, решение задачи (7) может быть получено с помощью собственных значений и собственных функций краевой задачи
$$\begin{aligned} &v''(x)+\lambda^2 v(x)=0,\ 0<x<l,\\ &v'(0)=0,\ v'(l)+\alpha v(l)=0. \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим через $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ \dots$ положительные корни трансцендентного уравнения

$$ctg\mu = \frac{\mu}{\alpha\, l}, \tag{10}$$

образующие последовательность, монотонно стремящуюся к ∞. Тогда собственные значения будут

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{l}, \tag{11}$$

а полной в $L_2(0,l)$ ортонормированной системой собственных функций будет

$$v_n(x) = \frac{1}{\omega_n}\cos\lambda_n x, \tag{12}$$

где

$$\omega_n^2 = \int_0^l \cos^2\lambda_n x dx = \frac{l[(\alpha\, l)^2 + \alpha\, l + \mu_n^2]}{2[(\alpha\, l)^2 + \mu_n^2]}.$$

Тогда решение задачи (7) получим в виде ряда

$$z(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k e^{-a^2\lambda_k^2 t} v_k(x), \tag{13}$$

где

$$\varphi_k = \int_0^l \varphi(x) v_k(x) dx, \ k = 1,2,3,\dots.$$

Решение задачи (8) ищем в виде ряда

$$W(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(t) v_k(x). \tag{14}$$

Для определения коэффициентов $W_k(t),\ k = 1,2,3,...$ получаем следующие уравнения

$$\dot{W}_k(t) + a^2\lambda_k^2 W_k(t) = \frac{\alpha a^2}{\omega_k} u(t)\cos\mu_k \tag{15}$$

с начальным условием

$$W_k(0) = 0,\ k = 1,2,3,... \tag{16}$$

Решая, находим решение задачи (8) в виде ряда

$$W(x,t) = \alpha a^2 \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\mu_k}{\omega_k} v_k(x)\int_0^t u(\tau) e^{-a^2\lambda_k^2(t-\tau)} d\tau. \tag{17}$$

Таким образом, решение задачи (2)-(4) будет

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2\lambda_k^2 t}\left(\varphi_k + \alpha a^2\frac{\cos\mu_k}{\omega_k}\int_0^t u(\tau) e^{a^2\lambda_k^2\tau} d\tau\right) v_k(x). \tag{18}$$

Ясно, что для большого k и при $t > 0$ выполняется неравенство

$$0 < a^2 \lambda_k^2 e^{-a^2 \lambda_k^2 t} < 1.$$

Поэтому ряд (18) и ряд, полученный из (18) почленным дифференцированием по x, сходятся абсолютно и равномерно по t. Тогда функция $y(x,t)$, определенная рядом (18), принадлежит $W_2^1(0,l)$ при $t \in [0,T]$.

Докажем, что функция $y(x,t)$, определенная рядом (18), удовлетворяет интегральному тождеству (5). Для любой функции $\eta(x,t) \in W_2^1(D)$ положим

$$J_n = \int_0^l [y_n(x,t)\eta(x,t) - \varphi(x)\eta(x,0)]dx - \alpha a^2 \int_0^t [u(\tau) - y_n(l,\tau)]\eta(l,\tau)d\tau -$$

$$- \int_0^t \int_0^l \left[y_n(x,\tau)\eta_t(x,\tau) - a^2 \frac{\partial y_n(x,\tau)}{\partial x} \eta_x(x,\tau) \right] dx d\tau, \qquad (19)$$

$$y_\eta(x,t) = \sum_{k=1}^n e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \left(\varphi_k + \alpha a^2 \frac{\cos \mu_k}{\omega_k} \int_0^t u(\tau) e^{a^2 \lambda_k^2 \tau} d\tau \right) v_k(x).$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^t y_n(x,\tau)\eta_t(x,\tau)d\tau = y_n(x,t)\eta(x,t) - y_n(x,0)\eta(x,0) -$$

$$- \int_0^t \frac{\partial y_n(x,\tau)}{\partial \tau} \eta(x,\tau) d\tau,$$

$$\int_0^l \frac{\partial y_n(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} dx = \frac{\partial y_n(l,t)}{\partial x} \eta(l,t) - \int_0^l \frac{\partial^2 y_n(x,t)}{\partial x^2} \eta(x,t) dx.$$

Подставляя эти выражения в (19), получим

$$J_n = \int_0^l \left[\sum_{k=1}^n \varphi_k v_k(x) - \varphi(x) \right] \eta(x,0) dx + \alpha a^2 \int_0^t u(\tau) \left[\sum_{k=1}^n \eta_k(\tau) v_k(l) - \eta(l,\tau) \right] d\tau,$$

где

$$\eta_k(t) = \int_0^l \eta(x,t) v_k(x) dx.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим, что $\lim_{n\to\infty} J_n = 0$.

Теперь докажем единственность решения. Пусть $y_1(x,t)$ и $y_2(x,t)$ - два решения уравнения (2), удовлетворяющие одним и тем же условиям (3) и (4). Тогда разность $y(x,t) = y_1(x,t) - y_2(x,t)$ будет решением однородной краевой задачи, и коэффициенты Фурье $y_k(t)$ по полной ортонормированной системе $\{v_k(x)\}$ равняются нулю. Поэтому $y(x,t)=0$, $(x,t)\in D$. Теорема доказана.

3. Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и условия $y_0(x)\in L_2(0,l)$, $u_o(t)\in L_2(0,T)$. Тогда для задачи (1)-(4) существует единственное оптимальное управление.

Доказательство. Пусть последовательность допустимых управлений $\{u_n(t)\}$ является минимизирующей функционал (1), т.е.

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n)=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^l [y_n(x,T)-y_0(x)]^2\,dx+\beta\int_0^T [u_n(t)-u_0(t)]^2\,dt\right\}=$$
$$=\inf_{v\in L_2(0,T)} J(v), \tag{20}$$

где $y_n(x,t)$ - обобщенное решение краевой задачи (2)-(4) при управлении $u_n(t)$.

Так как минимизирующая последовательность $\{u_n(t)\}$ ограничена в $L_2(0,T)$, то можно считать, что эта последовательность слабо в $L_2(0,T)$ сходится к некоторой функции $u(t)$. Обозначим через $y(x,t)$ решение краевой задачи (2)-(4) при управлении $u(t)$. Тогда можно показать, что

$$y_n(x,t)-y(x,t)=\alpha a^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\mu_k}{\omega_k}v_k(x)\int_0^t [u_n(\tau)-u(\tau)]e^{-a^2\lambda_k^2(t-\tau)}\,d\tau.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n\to\infty$, получим, что последовательность решений $\{y_n(x,t)\}$ равномерно по t сходится к решению $y(x,t)$ при всех $x\in[0,l]$.

Так как множество допустимых управлений выпукло, и функционал $J(u)$ полунепрерывен снизу, тогда функционал $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу [2, с.52]. Поэтому

$$J(u)=\int_0^l [y(x,T)-y_0(x)]^2\,dx+\beta\int_0^T [u(t)-u_0(t)]^2\,dt\le\lim_{n\to\infty} J(u_n)=\inf_v J(v).$$

Следовательно, $u(t)$ - оптимальное управление и $y(x,t)$ - оптимальное решение задачи (2)-(4). Единственность оптимального управления следует из строгой выпуклости функционала (1).

4. Сопряженное состояние задачи (1)-(4) определяется как решение задачи

$$\psi_t+a^2\psi_{xx}=0,\ (x,t)\in D, \tag{21}$$
$$\psi(x,T)=y_0(x)-y(x,T),\ 0\le x\le l, \tag{22}$$
$$\psi_x(0,t)=0, \psi_x(l,t)+\alpha\psi(l,t)=0,\ 0\le t\le T, \tag{23}$$

где $y(x,t)$ - решение задачи (2)-(4) при управлении $u(t)$.

Методом Фурье решение сопряженной задачи (21)-(23) можно представить в виде ряда

$$\psi(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-a^2\lambda_k^2(T-t)}v_k(x), \tag{24}$$

где

$$a_k=\int_0^l [y_0(x)-y(x,T)]v_k(x)dx,\ k=1,2,3....$$

Отметим, что функция $\psi(x,t)$, определенная рядом (24), принадлежит $W_2^{2,1}(D)$ и является решением почти всюду задачи (21)-(23).

Теорема 3. Пусть $u(t)$ допустимое управление, $y(x,t)$ - соответствующее решение краевой задачи (2)-(4). Тогда необходимым и достаточным условием оптимальности управления $u(t)$ является существование решения $y(x,t),\ \psi(x,t)$ задачи

$$y_t=a^2y_{xx},\ \psi_t+a^2\psi_{xx}=0,\ (x,t)\in D, \tag{25}$$

$$y(x,0)=\varphi(x),\ \psi(x,T)=y_0(x)-y(x,T),\ 0\le x\le l, \tag{26}$$

$$y_x(0,t)=0,\ y_x(l,t)=\alpha\left[u_0(t)+\frac{\alpha a^2}{\beta}\psi(l,t)-y(l,t)\right],$$

$$\psi_x(0,t)=0,\ \psi_x(l,t)+\alpha\psi(l,t)=0,\ 0\le t\le T. \tag{27}$$

При этом единственное оптимальное управление $u(t)$ задачи (1)-(4) определяется равенством

$$u(t)=u_0(t)+\frac{\alpha a^2}{\beta}\psi(l,t),\ 0\le t\le T. \tag{28}$$

Доказательство необходимости. Пусть $u(t)$ - оптимальное управление, а $y(x,t)$ - соответствующее ему решение задачи (2)-(4).

Для произвольной функции $r(t)\in L_2(0,T)$ положим $\bar{u}(t)=u(t)+$ $+r(t),\ 0\le t\le T$. Обозначим через $\bar{y}(x,t)$ решение задачи (2)-(4) при управлении $\bar{u}(t)$. Тогда

$$\bar{y}(x,t)=y(x,t)+\Phi(x,t),$$

где $\Phi(x,t)$ определяется как решение задачи

$$\Phi_t=a^2\Phi_{xx},\ (x,t)\in D, \tag{29}$$

$$\Phi(x,0)=0,\ 0\le x\le l, \tag{30}$$

$$\Phi_x(0,t)=0, \Phi_x(l,t)=\alpha[r(t)-\Phi(l,t)],\ 0\le t\le T. \tag{31}$$

Решение этой задачи можно представить в виде ряда

$$\Phi(x,t)=\alpha a^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\mu_k}{\omega_k}v_k(x)\int_0^t r(\tau)e^{-a^2\lambda_k^2(t-\tau)}d\tau. \tag{32}$$

Используя, что функции $\psi(x,t)$ и $\Phi(x,t)$ являются решениями задач (21)-(23) и (29)-(30), соответственно, приращение функционала (1) можно представить в виде

$$\Delta J(u) = J(\overline{u}) - J(u) = \int_0^l [\overline{y}(x,T) - y_0(x)]^2 dx + \beta\int_0^T [\overline{u}(t) - u_0(t)]^2 dt -$$

$$-\int_0^l [y(x,T) - y_0(x)]^2 dx - \beta\int_0^T [u(t) - u_0(t)]^2 dt +$$

$$+2\left\{\int_0^l \Phi(x,T)\psi(x,T)dx - \alpha a^2\int_0^T [r(t) - \Phi(l,t)]\psi(l,t)dt -\right.$$

$$\left.-\int_0^T\int_0^l [\Phi(x,t)\psi_t(x,t) - a^2\Phi_x(x,t)\psi_x(x,t)]dxdt\right\} =$$

$$= 2\int_0^T \{\beta[u(t) - u_0(t)] - \alpha a^2\varphi(l,t)\}r(t)dt + \rho, \tag{33}$$

где

$$\rho = \int_0^l \Phi^2(x,T)dx + \beta\int_0^T r^2(t)dt\,. \tag{34}$$

Учитывая представление (32), получим

$$\int_0^l \Phi^2(x,T)dx = \alpha^2 a^4 \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos\mu_i\cos\mu_j}{\omega_i\omega_j}\int_0^l\left(v_i(x)\int_0^T r(t)e^{-a^2\lambda_i^2(T-t)}dt\right)\times$$

$$\times\left(v_j(x)\int_0^T r(t)e^{-a^2\lambda_j^2(T-t)}dt\right)dx = \alpha^2 a^4\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\mu_i}{\omega_i}\right)^2\left(\int_0^T r(t)e^{-a^2\lambda_i^2(T-t)}dt\right)^2 \le$$

$$\le \alpha^2 a^4\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\mu_i}{\lambda_i\omega_i}\right)^2\int_0^T r^2(t)dt = M\int_0^T r^2(t)dt, \tag{35}$$

где $$M = \alpha^2 a^4\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\mu_i}{\lambda_i\omega_i}\right)^2. \tag{36}$$

Из (34), имеем

$$\rho \le (M+\beta)\int_0^T r^2(t)dt = M_1\|r\|^2_{L_2(0,T)} = o(\|r\|),\ M_1 = M + \beta\,. \tag{37}$$

Учитывая, что $u(t)$ - есть оптимальное управление, и оценку (37), из (33) будем иметь

$$\Delta J(u) = 2\int_0^T \{\beta[u(t) - u_0(t)] - \alpha a^2\psi(l,t)\}r(t)dt + o(\|r\|) \ge 0\,. \tag{38}$$

Отсюда, учитывая произвольность $r(t)$ из $L_2(0,T)$, получим формулу (28).

Подставляя (28) в условии (4), получим, что функции $y(x,t), \psi(x,t)$ являются решениями задачи (25)-(27).

Доказательство достаточности. Пусть функции $y(x,t), \psi(x,t)$ решения задачи (25)-(27) и управление $u(t)$ определено формулой (28). Тогда для любой $r(t)$ из $L_2(0,T)$, положим

$$\bar{u}(t) = u(t) + r(t), \; \bar{y}(x,t) = y(x,t) + \Phi(x,t) .$$

Аналогично вышеуказанному, вычисляя приращение функционала, получим, что

$$\Delta J(u) = \int_0^l \Phi^2(x,T)dx + \beta \int_0^T r^2(t)dt \geq 0 .$$

Отсюда следует, что управление $u(t)$, определенное равенством (28), является оптимальным управлением. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г., Малый С.А., Андреев Ю.Н. Оптимальное управление нагревом металла. М.: Металлургия, 1972, 440 с.
2. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978, 464 с.
4. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.
5. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 414 с.

SƏRHƏD İDARƏEDİCİNİN KÖMƏYİLƏ ÇUBUĞUN QIZDIRILMA PROSESİNİN OPTİMAL İDARƏOLUNMASI

K.Q.HƏSƏNOV, L.K.HƏSƏNOVA

XÜLASƏ

İşdə yan səthi və sol uçu ətraf mühitlə istilik mübadiləsindən təcrid olan, sağ uçu isə ətraf mühitlə istilik mübadiləsində olan bircins çubuqda temperaturun yayılması prosesi öyrənilir. Əvvəlcə alınan sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi göstərilir. Sonra isə optimal idarəedici funksiyanın varlığı və yeganəliyi haqqında teorem isbat olunur. İdarəedici funksiyanın optimal olması üçün zəruri və kafi şərtlər alınır.

Açar sözlər: idarəetmə, funksional, qoşma sistem, Furye üsulu, ümumiləşmiş həll.

OPTIMAL CONTROL OF THE HEATING ROD PROCESS

K.G.HASANOV L.K.HASANOVA

SUMMARY

The paper considers the optimal control problem of the heating rod using boundary control. The theorem of existence and uniqueness of optimal control is proved. The necessary and sufficient conditions for optimal control are obtained.

Key words: control, fundamental, adjoint system, Fourier method, generalized solution.

Поступила в редакцию: 18.03.2014 г.
Подписано к печати: 04.07.2014 г.